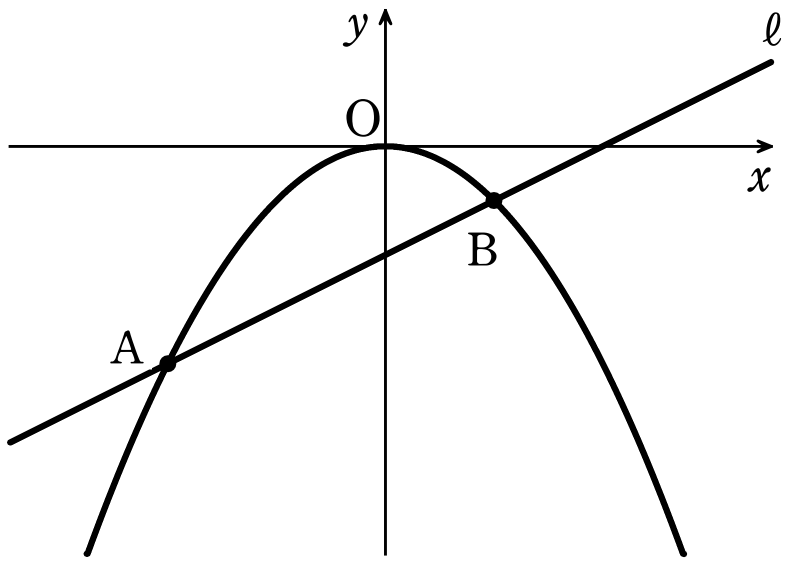
$\boxed{1}$ 右の図のように，放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 ℓ が2点 A$(-4,\ -4)$，B$(2,\ -1)$ で交わっています。次の問いに答えなさい。



(1)　直線 ℓ の式を求めなさい。

(2)　△OAB の面積を求めなさい。

(3)　点 P は放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点で，△OAB＝△PAB を満たす原点とは異なる点とします。点 P の座標を求めなさい。

解説

(1)　求める直線の式を $y=ax+b$ とおくと， 2点 A , B を通るので

$\begin{cases} -4=-4a+b \\ -1=\ 2a\ +b \end{cases}$ 　これを解くと $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-2$

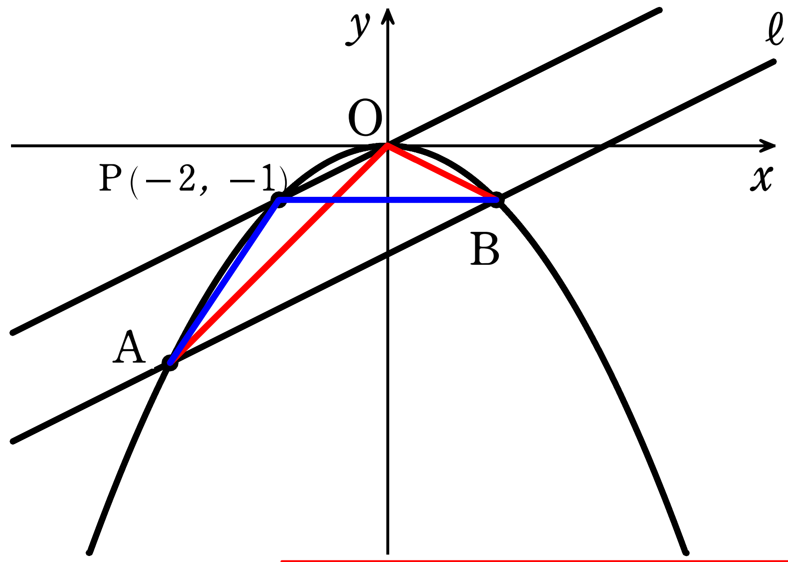
よって， 直線 ℓ の式は　$y=\dfrac{1}{2}x-2$

Point
・関数が点Aを通る
→点Aの座標を
「代入」する

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times4+\dfrac{1}{2}\times2\times2$

$=6$

(3)　点 O を通り，直線 ℓ と平行な直線をひき，
この直線と放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ との交点
のうち原点でないものを P とする。
このとき，△OAB＝△PAB となることから，
この点 P の座標を求めればよい。



直線 OP の式は　$y=\dfrac{1}{2}x$

$y=\dfrac{1}{2}x$ を $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると

$\dfrac{1}{2}x=-\dfrac{1}{4}x^2$　　$x^2+2x=0$　　$x(x+2)=0$　　$x=0,\ -2$

点 P は原点とは異なるから　$x=-2$

$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x$ に代入すると　　$y=\dfrac{1}{2}\times(-2)=-1$

よって，点 P の座標は　$(-2,\ -1)$

Point
・面積の等しい三角形
→「等積変形」を疑う
→共通している辺と
　平行な線を引く

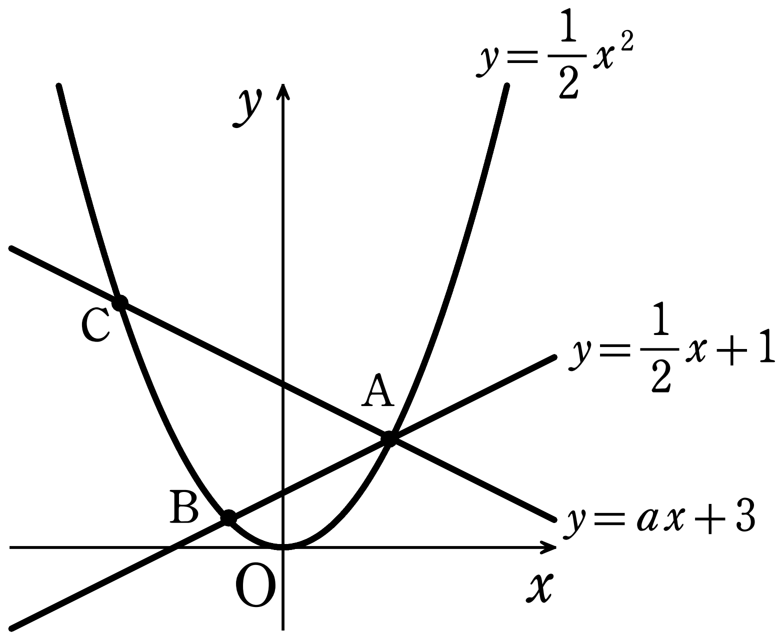
$\boxed{2}$ 右の図のように，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ と，2 直線 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ と $y=ax+3$ が 3 点 A，B，C で交わっている。次の問いに答えなさい。

(1)　点 A の座標，点 B の座標を求めなさい。

(2)　a の値，点 C の座標を求めなさい。

(3)　△ABC の面積を求めなさい。

(4)　点 A を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



解説

(1)　点 A，B の x 座標は $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ y=\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$ の解であるから

Point
・関数の交点の座標
→2つの関数の方程式の解

$\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{2}x+1$　　$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1,\ 2$

$x=-1$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると　　$y=\dfrac{1}{2}\times(-1)^2=\dfrac{1}{2}$

$x=2$　を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると　　$y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$

よって，図から，点 A の座標は　$(2,\ 2)$，点 B の座標は　$\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2)　$y=ax+3$ に $x=2$，$y=2$ を代入すると

$2=2a+3$　　$2a=-1$　　$a=-\dfrac{1}{2}$

点 C の座標は $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+3 \end{cases}$ の解であるから，これを解くと

$\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}x+3$　　$x^2+x-6=0$　　$(x-2)(x+3)=0$　　$x=2,\ -3$

点 C の x 座標は負であるから　$x=-3$

y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-3$ を代入すると　　$y=\dfrac{1}{2}\times(-3)^2=\dfrac{9}{2}$

よって，点 C の座標は　$\left(-3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

(3)　点 B を通り，y 軸に平行な直線と直線 AC との交点を D とすると，点 D の y 座標は

$y=-\frac{1}{2}x+3$ に $x=-1$ を代入して

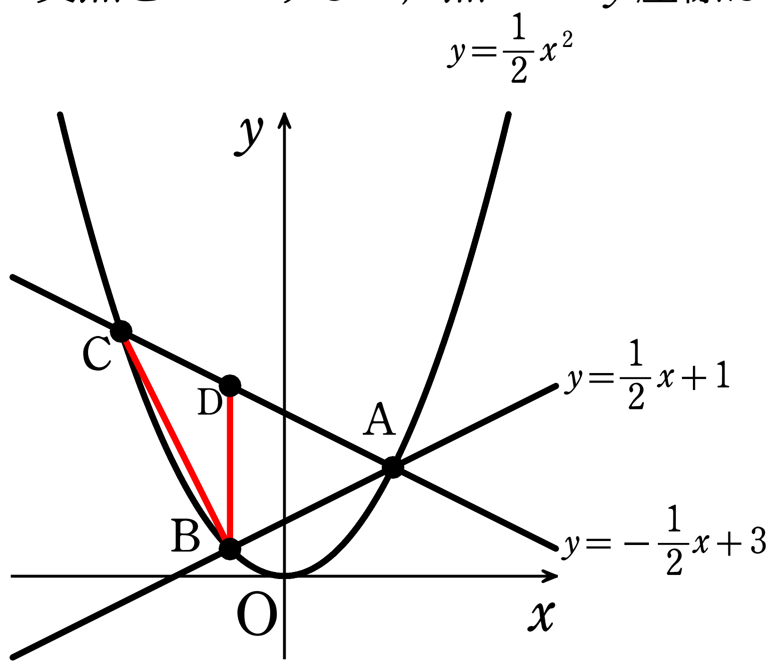
$$y=-\frac{1}{2}\times(-1)+3=\frac{7}{2}$$

よって　$BD=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$

$\triangle ABC=\triangle CBD+\triangle ABD$

$=\frac{1}{2}\times3\times\{(-1)-(-3)\}+\frac{1}{2}\times3\times\{2-(-1)\}$

$=\frac{3}{2}\times2+\frac{3}{2}\times3=\frac{15}{2}$



Point
・図形の面積
$\rightarrow\begin{cases}①簡単な図形に分割する\\②全体から引く\end{cases}$ で考える

(4)　辺 BC の中点を M とすると，
求める直線は AM である。

点 M の座標は　$x=\frac{(-3)+(-1)}{2}=-2$

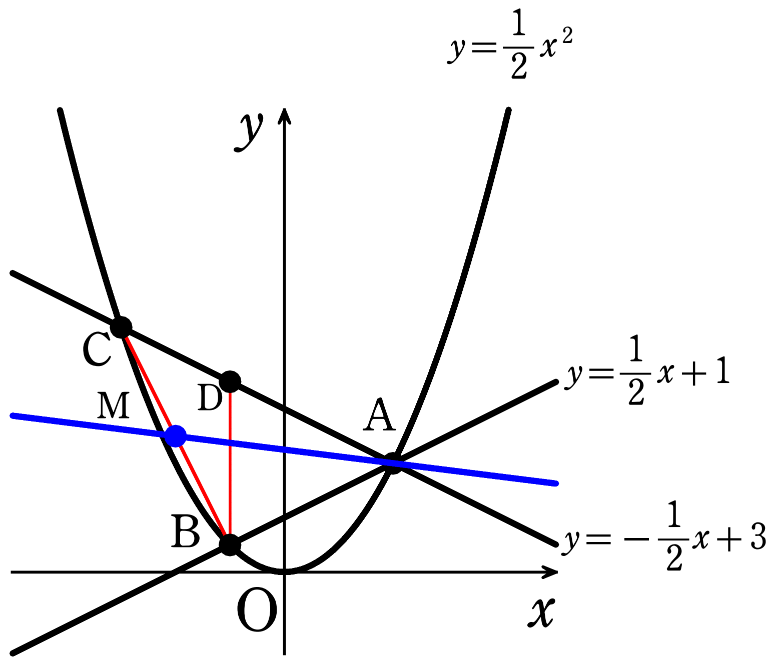
$$y=\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)\div2=\frac{5}{2}$$

ここで求める直線の式を $y=ax+b$ とおくと，
2点 A , M を通るので

$$\begin{cases}2=2a+b\\ \frac{5}{2}=-2a+b\end{cases}$$

これを解くと $a=-\frac{1}{8}$, $b=\frac{9}{4}$

よって，　直線 ℓ の式は　$y=-\frac{1}{8}x+\frac{9}{4}$



Point
・三角形の頂点を通る面積の 2 等分線
→頂点と対辺の中点を通る直線

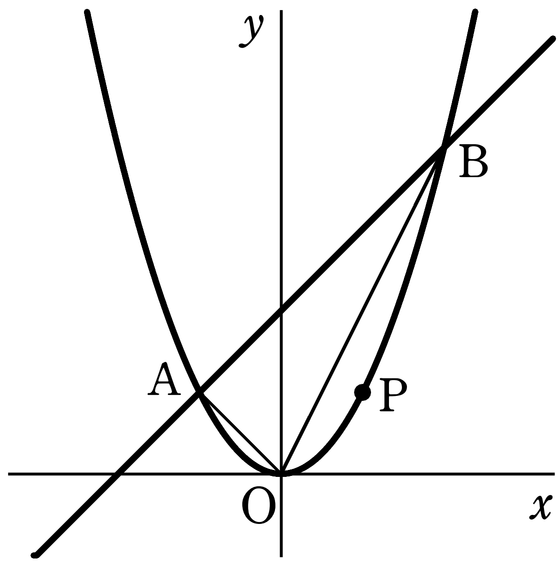
Point
・A (a, b) と B (c, d) の中点の座標
$\rightarrow\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ である

$\boxed{3}$ 右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ と直線 $y=x+6$ との交点を A，B とする。次の問いに答えなさい。

(1)　点 A，B の座標を，それぞれ求めなさい。

(2)　放物線上の点で，2 点 A，B の間に，$\triangle AOB=\triangle APB$ となるような点 P をとるとき，点 P の座標を求めなさい。

(3)　点 P を通り，四角形 OPBA の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



解説

(1)　点 A，B の x 座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=x+6 \end{cases}$ の解であるから，これを解くと

$\frac{1}{3}x^2=x+6$　　$x^2-3x-18=0$　　$(x+3)(x-6)=0$　　$x=-3,\ 6$

$x=-3$ のとき　$y=-3+6=3$

$x=6$　のとき　$y=6+6=12$

よって，点 A の座標は $(-3,\ 3)$，点 B の座標は $(6,\ 12)$

Point
・関数が点Aを通る
→点Aの座標を
「代入」する

(2)　$\triangle AOB=\triangle APB$ となるとき，AB∥OP である。

直線 AB の傾きは 1 なので，直線 OP の式は　$y=x$

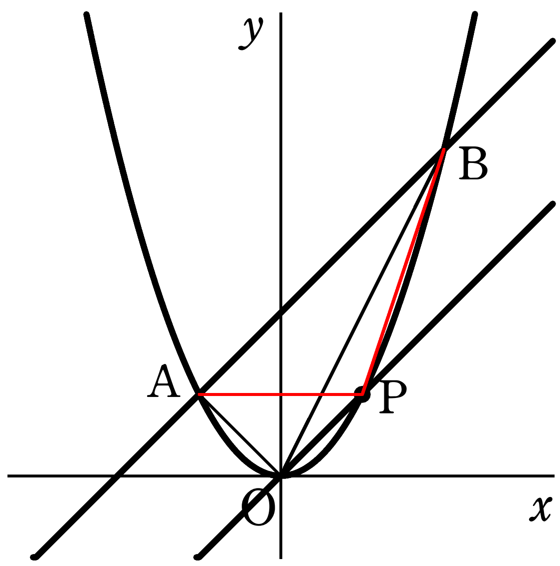
連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=x \end{cases}$ を解くと

$\frac{1}{3}x^2=x$　　$x^2-3x=0$　　$x(x-3)=0$　　$x=0,\ 3$

$x=0$ のとき $y=0$，$x=3$ のとき $y=3$

点 P は原点とは異なる点であるから，

点 P の座標は $(3,\ 3)$



Point
・面積の等しい三角形
→「等積変形」を疑う
→共通している辺と
平行な線を引く

(3)　四角形 OPBA の面積は

$$\triangle OAP+\triangle BAP=\frac{1}{2}\times\{3-(-3)\}\times 3+\frac{1}{2}\times\{3-(-3)\}\times(12-3)$$

$$=9+27=36$$

求める直線と直線 AB の交点を Q とすると

$$\triangle QAP=\frac{36}{2}-\triangle OAP=18-9=9$$

点 Q の座標を $(q,\ q+6)$ とおくと

$$\frac{1}{2}\times 6\times\{(q+6)-3\}=9$$

$$3(q+3)=9$$

$$q+3=3$$

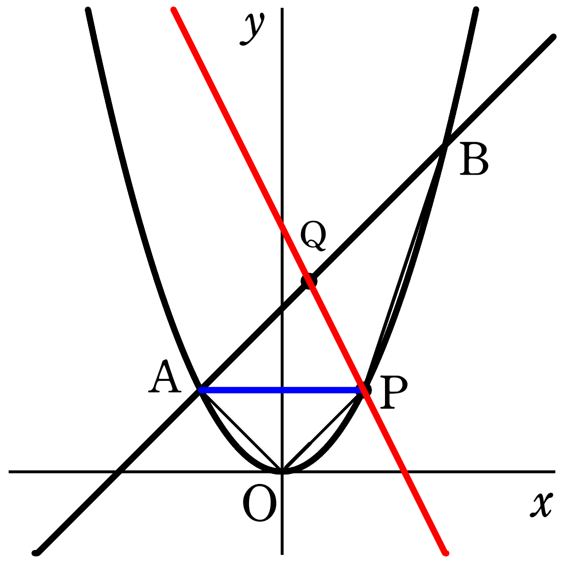
$$q=0$$

よって，点 Q の座標は $(0,\ 6)$ であるから

求める直線の式を $y=ax+6$ とおける。

点 P を通るので，$3=3a+6$　　$a=-1$

よって，直線の式は　$y=-x+6$



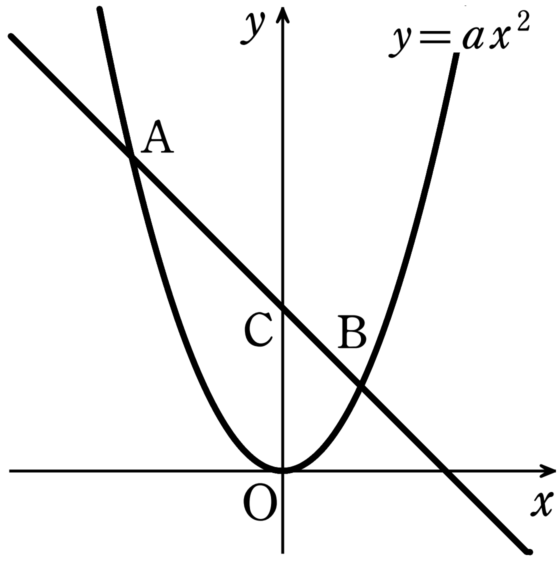
Point

・一般的な四角形の面積の 2 等分線

→使える公式や定理はない

→具体的に数値を計算して考える

$\boxed{4}$ 図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと直線が 2 点 A，B で交わっている。直線 AB と y 軸との交点を C とする。A の座標が $(-4,\ 12)$，B の x 座標が 1 であるとき，次の各問いに答えよ。O は原点である。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 C の座標を求めよ。

(3) △OAB の面積を求めよ。

(4) 点 C を通り，△OAB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

解説

(1) 点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上より，$y=ax^2$ に $x=-4$，$y=12$ を代入すると

$12=a\times(-4)^2 \qquad a=\dfrac{3}{4}$

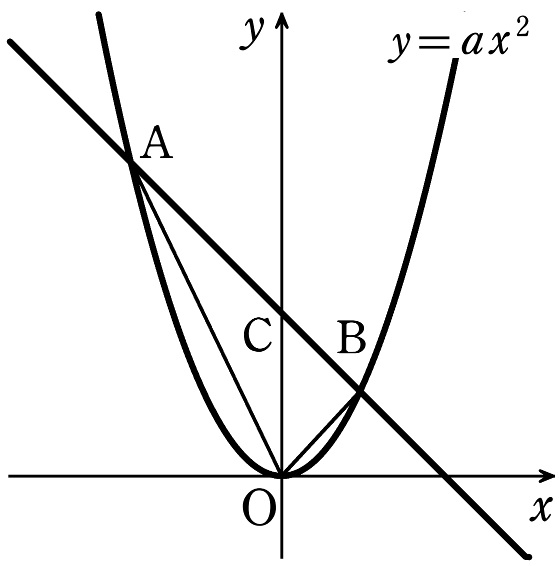
(2) 点 B は関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフ上より，$y=\dfrac{3}{4}x^2$ に $x=1$ を代入すると $y=\dfrac{3}{4}$

よって，点 B の座標は $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$

求める直線の式を $y=ax+b$ とおくと， 2点 A , B を通るので

$\begin{cases} 12=-4a+b \\ \dfrac{3}{4}=\quad a+b \end{cases}$ これを解くと $a=-\dfrac{9}{4}$, $b=3$

よって， 直線 ℓ の式は $y=-\dfrac{9}{4}x+3$ なので点 C の座標は $(0,\ 3)$



(3) △OAB＝△OAC＋△OBC

$=\dfrac{1}{2}\times3\times4+\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{15}{2}$

(4)　直線OAの傾きは $-\frac{12}{4}=-3$ であるから，

直線OAの式は　$y=-3x$

求める直線とOAの交点Dの座標を $(d,\ -3d)$ とする。

$\triangle OBC=\frac{3}{2}$ であるから，　$\triangle OCD=\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

より $\frac{1}{2}\times 3\times(-d)=\frac{9}{4}$　　$-d=\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}$　　$d=-\frac{3}{2}$

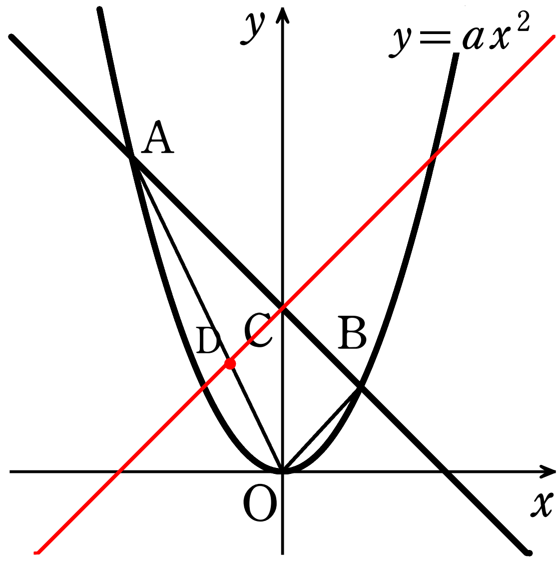
点Dの座標は　$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

よって，点Cの座標は $(0,\ 3)$ であるから，

求める直線の式を $y=ax+3$ とおける。

点Dを通るので，$\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}a+3$　　$a=-1$

よって，　直線の式は　$y=-x+3$

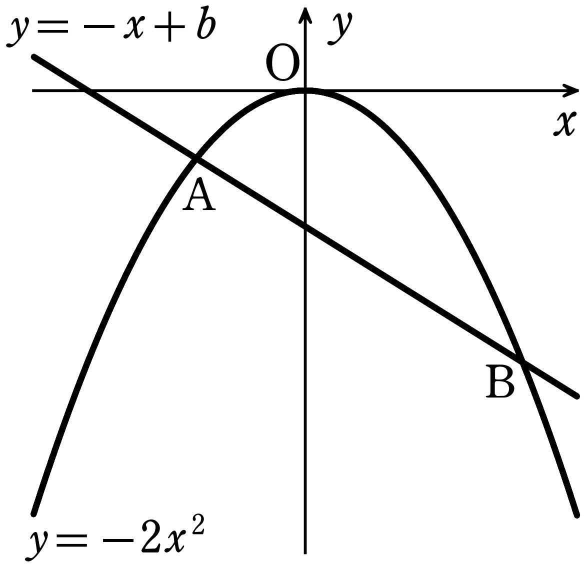


$\boxed{5}$ 右の図のように，放物線 $y=-2x^2$ と直線 $y=-x+b$ は2点A，Bで交わっており，2点A，Bの x 座標はそれぞれ $-\frac{1}{2}$，1である。

次の各問いに答えよ。

(1)　△OABの面積を求めよ。

(2)　原点Oを通り，△OABの面積を2等分する直線の式を求めよ。



解説

(1)　点A，Bは放物線 $y=-2x^2$ 上の点であるから

$y=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$　　　　$y=-2\times1^2=-2$

よって，2点A，Bの座標はそれぞれ $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$(1,\ -2)$

また，点Bは，$y=-x+b$ 上の点でもあるから　$-2=-1+b$　　$b=-1$

したがって，直線と y 軸との交点をCとすると

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{4}$

(2)　辺ABの中点をMとすると，
求める直線はOMである。

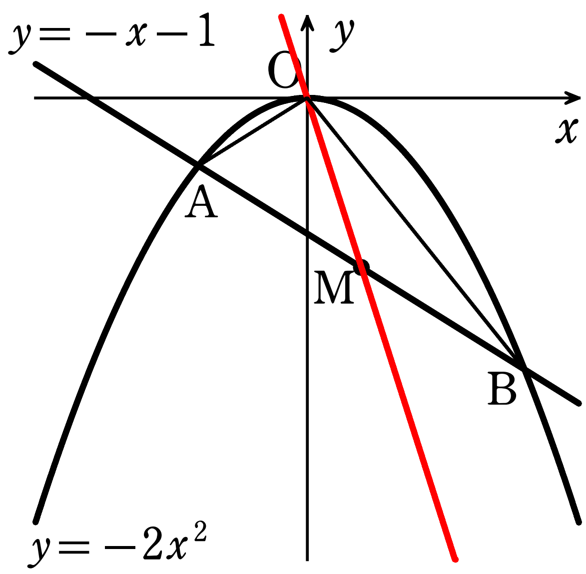
点Mの座標は　　$x=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\div2=\frac{1}{4}$

$y=\left\{-\frac{1}{2}+(-2)\right\}\div2=-\frac{5}{4}$

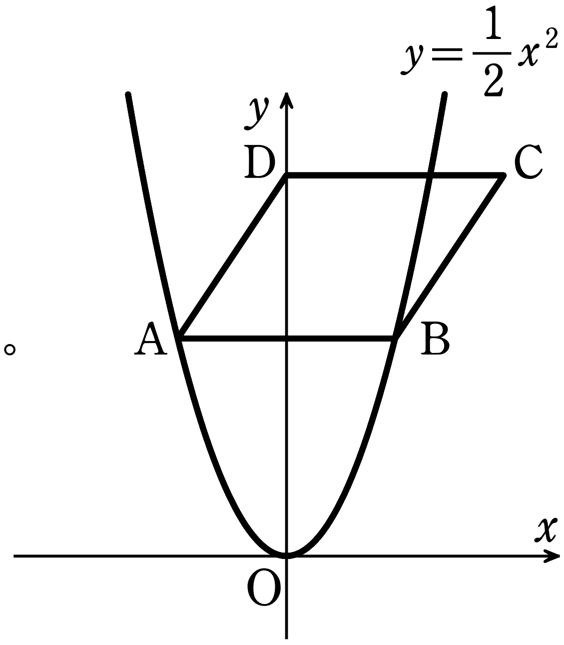
ここで求める直線の式を $y=ax$ とおくと
点Mを通るので

$-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}a$　　よって $a=-5$

よって，求める直線の式は　$y=-5x$



$\boxed{6}$ 右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に y 座標が等しい2点 A，B をとる。ただし，点 A の x 座標は負であるとする。点 A を通り，傾き $\frac{3}{2}$ の直線と y 軸との交点を D とし，平行四辺形 ABCD をつくる。次の問いに答えよ。



(1)　B の x 座標を 8 とするとき，C の座標を求めよ。

(2)　B の x 座標を $2t$ とする。平行四辺形 ABCD の面積が 48 となるとき，t の値を求めよ。

(3)　(2) のとき，直線 BC と y 軸との交点を通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

解説

(1)　点 B は放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるから，$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=8$ を代入して $y=\frac{1}{2}\times8^2=32$

よって，点 B の座標は $(8,\ 32)$，点 A の座標は $(-8,\ 32)$，$AB=16$

直線 AD の傾きは $\frac{3}{2}$ であるから，

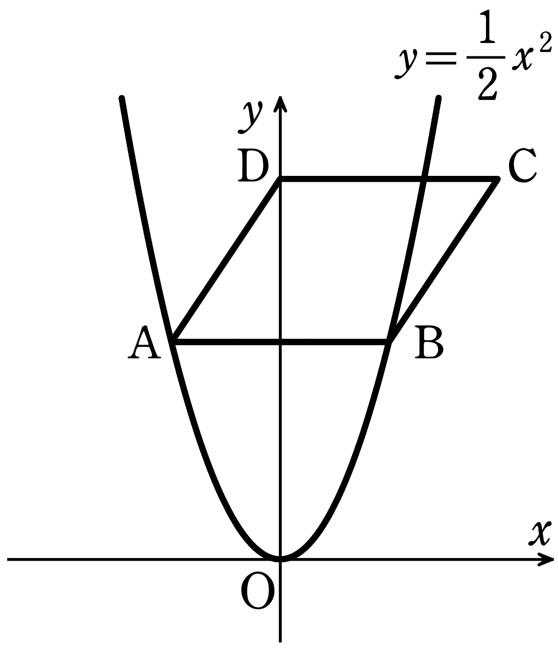
点 D の y 座標を d とすると，直線 AD の式は

$y=\frac{3}{2}x+d$ と表され，点 A を通るから

$32=\frac{3}{2}\times(-8)+d$　　$d=44$

したがって，C の座標は　$(16,\ 44)$

Point
・平行な 2 直線
→傾きが等しい



(2)　直線 AB と y 軸との交点を E とすると，

$BE=2t$ なので，　$AE=2t$

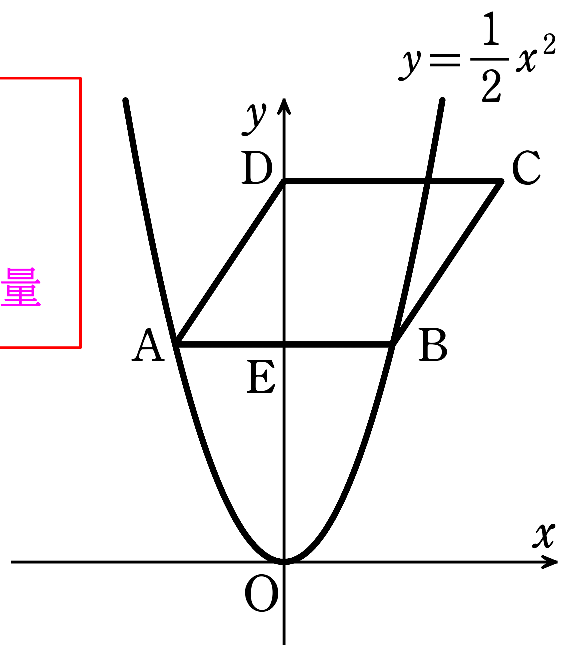
よって，　$DE=2t\times\frac{3}{2}=3t$

平行四辺形の面積について

$$(2t\times2)\times3t=48$$
$$12t^2=48$$
$$t^2=4$$

$t>0$ であるから　$t=2$

Point
・y の増加量
→変化の割合 × x の増加量



(3)　(2) より，点 B の座標は　$x=4$，$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$

直線 BC の傾きは $\frac{3}{2}$ であるから，直線 BC と y 軸との交点を F とし，点 F の y 座標を f とすると，

直線 BC の式は $y=\frac{3}{2}x+f$ と表され，点 B を通るから

$8=\frac{3}{2}\times 4+f$　　$f=2$

(2) より，点 D の y 座標は　$8+3\times 2=14$

点 M の座標は　$x=\frac{4+0}{2}=2$

$y=\frac{8+14}{2}=11$

すなわち　$(2,\ 11)$

平行四辺形の面積を 2 等分する直線は

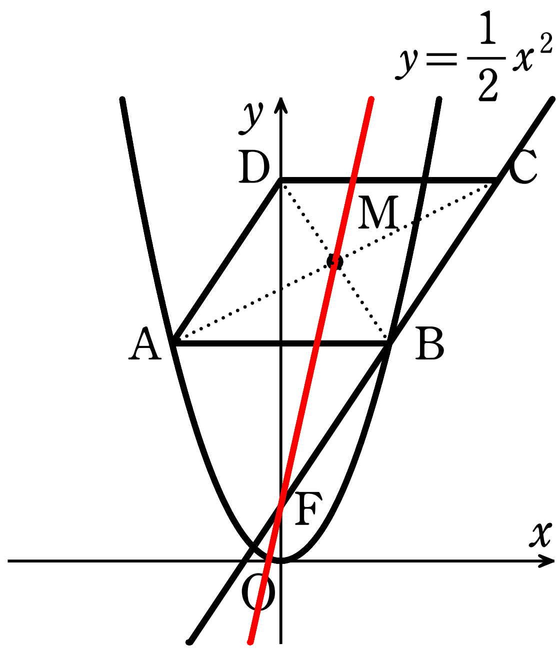
直線 FM である。

ここで求める直線の式を $y=ax+2$ とおくと

点 M を通るので

$11=2a+2$　よって　$a=\frac{9}{2}$

よって，求める直線の式は　$y=\frac{9}{2}x+2$

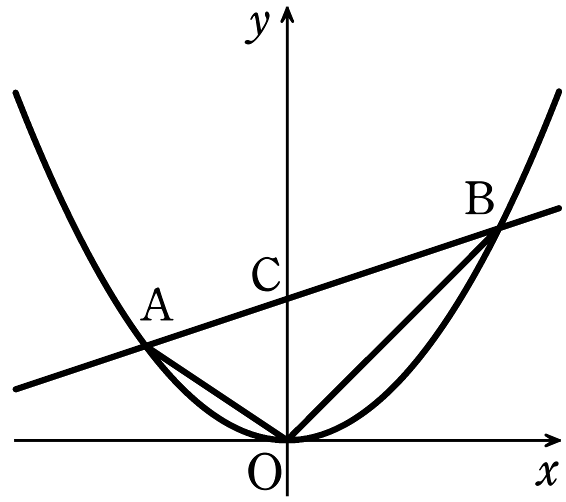


Point

・平行四辺形の面積 2 等分線

→対角線の交点を通る直線

7 図のように放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=ax+2$ の2つの交点をA，Bとし，直線 $y=ax+2$ と y 軸との交点をCとする。ただし，$a>0$ とする。点Aの x 座標が -2 であるとき，次の問いに答えよ。



(1)　a の値と点Bの座標を求めよ。

(2)　△OABの面積を求めよ。

(3)　点Cを通る直線 ℓ で△OABの面積を2等分するとき，直線 ℓ の式を求めよ。

(4)　(3)のとき，△OABが直線 ℓ によって切り取られた四角形の面積を，点Cを通る直線 m でさらに2等分するとき，直線 m の式を求めよ。

解説

(1)　点Aは放物線 $y=ax^2$ 上にあるから，$y=ax^2$ に $x=-2$ を代入すると　$y=4a$

点Aは直線 $y=ax+2$ 上にもあるから，$y=ax+2$ に $x=-2$，$y=4a$ を代入すると

$4a=-2a+2$　　　$6a=2$　　　$a=\frac{1}{3}$

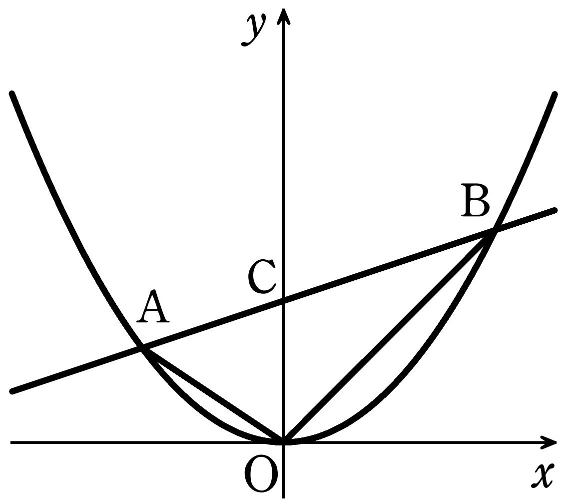
点Bの x 座標は $\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{3}x+2$ の解であるから，整理すると

$x^2-x-6=0$　　　$(x+2)(x-3)=0$　　　$x=-2,\ 3$

点Bの x 座標は正であるから　$x=3$

$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=3$ を代入すると　$y=3$

よって，点Bの座標は　(3，3)



(2)　点Cの y 座標は2であるから

△OAB＝△OCA＋△OCB

$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times3$

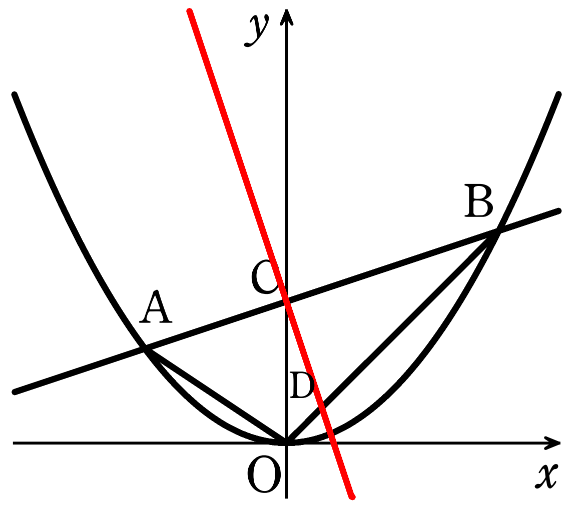
$=5$

(3)　(2)より△OAC＝2なので，求める直線はOBと交わる。

よって，求める直線とOBの交点をD，点Dの x 座標を d とする。

$\triangle OAC=2$ より　$\triangle OCD=\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{1}{2}\times 2\times d=\dfrac{1}{2}$　　$d=\dfrac{1}{2}$



直線 OB の式は $y=x$ であるから，

点 D の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ここで求める直線の式を $y=ax+2$ とおくと

点 D を通るので　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a+2$　よって　$a=-3$

よって，求める直線の式は　$y=-3x+2$

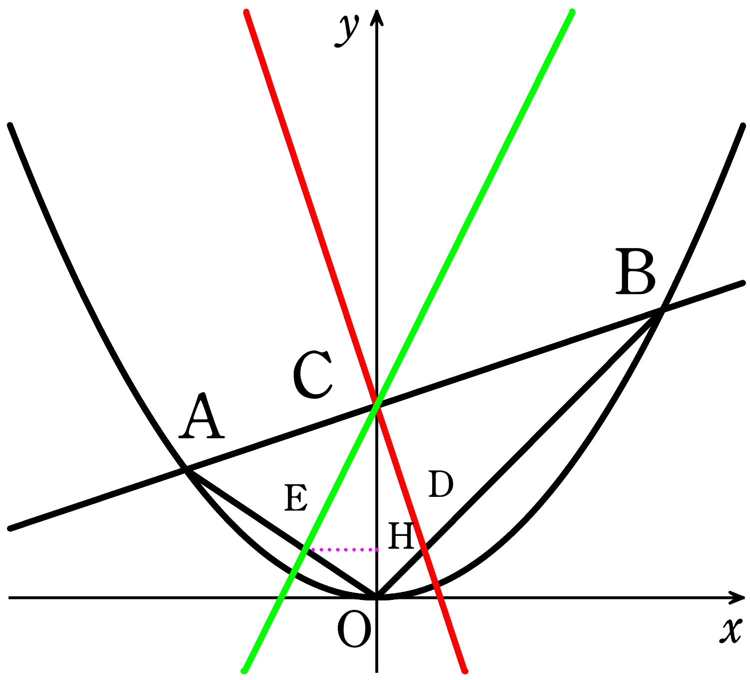
(4)　(3) より $\triangle OCD=\dfrac{1}{2}$ なので，求める直線は OA と交わる。

よって，求める直線と OA の交点を E，点 E から y 軸に下した垂線との交点を H とし，EH $=e$ とおく。

$\triangle COE+\triangle COD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{4}$ であるから

$\triangle COE=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

よって　$\dfrac{1}{2}\times 2\times e=\dfrac{3}{4}$　　$e=\dfrac{3}{4}$



点 A の座標は $\left(-2,\ \dfrac{4}{3}\right)$ であるから，

直線 OA の式は　$y=-\dfrac{2}{3}x$

点 E の y 座標は　$y=-\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

よって点 E の座標は $\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ここで求める直線の式を $y=ax+2$ とおくと

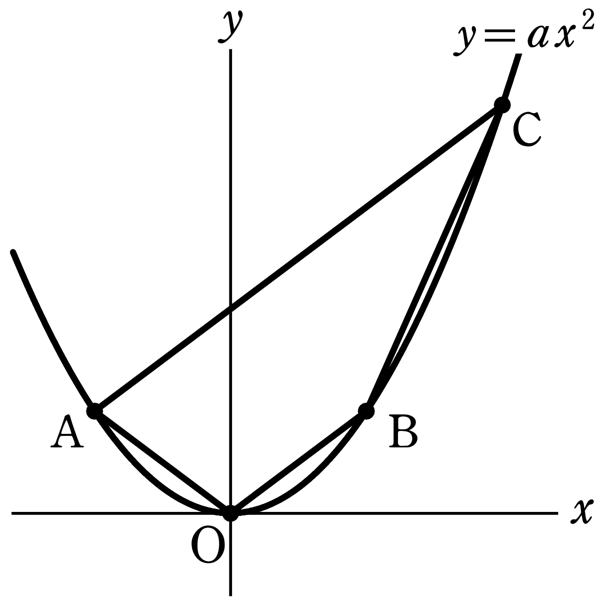
点 E を通るので　$\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}a+2$　よって　$a=2$

よって，求める直線の式は　$y=2x+2$

$\boxed{8}$ 図で，O は原点，A，B，C は関数 $y=ax^2$（a は定数）のグラフ上の点である。点 A，B の座標がそれぞれ $(-3,\ 3)$，$(3,\ 3)$ であり，点 C の x 座標が 6 であるとき，次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1)　a の値を求めなさい。

(2)　原点を通り，四角形 AOBC の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



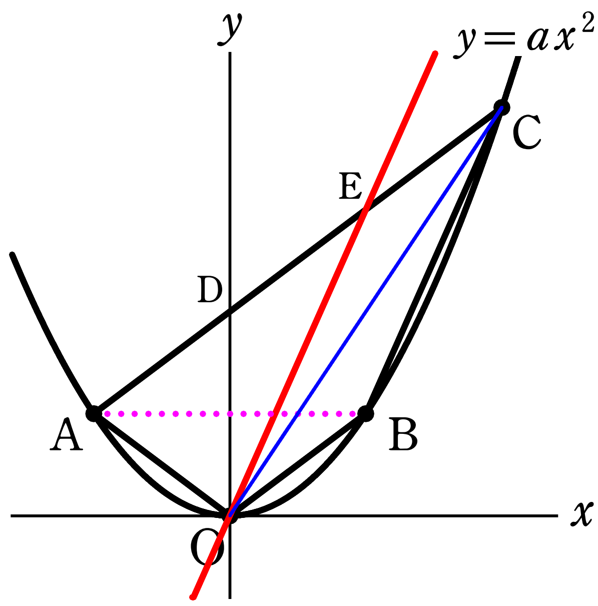
（解説）

(1)　点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上により，$x=-3$，$y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると

$3=a\times(-3)^2$　　よって　　$a=\dfrac{1}{3}$

(2)　点 C は関数 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるから，$x=6$ を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入すると

$y=\dfrac{1}{3}\times6^2=12$　よって，点 C の座標は　$(6,\ 12)$



直線 AC の式を $y=mx+n$ とすると

2点 A , C を通るので

$$\begin{cases} 3=-3m+n \\ 12=6m+n \end{cases}$$

これを解くと　$m=1$，$n=6$

したがって，直線 AC の式は　$y=x+6$

直線 AC と y 軸との交点を D とすると，$\mathrm{OD}=6$

$\mathrm{AB}=3-(-3)=6$ より

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$，　$\triangle\mathrm{CAB}=\dfrac{1}{2}\times6\times(12-3)=27$

よって，四角形 AOBC の面積は　$9+27=36$

また，$\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{OAD}+\triangle\mathrm{OCD}=9+18=27$ より

四角形 AOBC の面積を 2 等分する直線は直線 AC の DC 側と交わる

その交点を E とし，座標を $(t,\ t+6)$ とおく。ただし，$t>0$ である

$\triangle\mathrm{OAE}=\triangle\mathrm{OAD}+\triangle\mathrm{OED}$ であるから，$\triangle\mathrm{OAE}$ の面積について

$18=\dfrac{1}{2}\times6\times3+\dfrac{1}{2}\times6\times t$　　$3t=9$　　$t=3$　　よって，点 E の座標は　$(3,\ 9)$

したがって，直線 OE の傾きは $\dfrac{9}{3}=3$ であるから，求める直線の式は　$y=3x$